Conclusion :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \boxed{U_n=\frac{3.\left(\frac{3}{7}\right)^n-1}{-\left(\frac{3}{7}\right)^n-1}=\frac{1-3.\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n}}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$ car $-1<q<1$

d)*/ $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}V_n=V_0\times\frac{1-q^n}{1-q}$

$$=(-1)\times\frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1-\frac{3}{7}}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n-1}{\frac{7-3}{7}}=\frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n-1\right)$$

D'où : $\boxed{S_n=\frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n-1\right)}$

*/ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{4}\left(\underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0}-1\right)=-\frac{7}{4}$

Exercice 2

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\dfrac{4}{4-U_n},\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) a) par récurrence :

* pour $n=0$ on a : $U_0=1\le 2$ (vrai)

* supposons que $U_n\le 2$

et montrons que $U_{n+1}\le 2$

En effet :

$U_n\le 2\Leftrightarrow -U_n\ge -2$

$$\Leftrightarrow 4-U_n\ge 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4-U_n}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{4-U_n}\le\frac{4}{2}=2$$

D'où : $U_{n+1}\le 2$

Par suite $\forall n\in\mathbb{N}\ :U_n\le 2$

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{4}{4-U_n}-U_n$

$$=\frac{4-4U_n+U_n^2}{4-U_n}$$

$$=\frac{(U_n-2)^2}{4-U_n}$$

Comme $U_n\le 2$ on a $4-U_n\ge 0$

D'où $U_{n+1}-U_n\ge 0$ et par suite

(U_n) est une suite croissante.

c/ */ la suite (U_n) étant croissante et majorée par 2 donc elle converge vers un réel ℓ

•/ on a :

*/ $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\frac{4}{4-x}$

*/ (U_n) converge vers $l\le 2$

*/ f est continue en l

Car $]-\infty,2]\subset\mathbb{R}\setminus\{4\}$ d'où $f(\ell)=\ell$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{4-\ell}=\ell\Leftrightarrow 4=4\ell-\ell^2\Leftrightarrow\ell^2-4\ell+4=0$$

$$\Leftrightarrow(\ell-2)^2=0\Leftrightarrow\ell=2$$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2}$

2) $V_n=\frac{1}{U_n-2}$

a/ $\forall n\in\mathbb{N}$ on a :

$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}-2}$

Or $U_{n+1}-2=\frac{4}{4-U_n}-2=\frac{4-8+2U_n}{4-U_n}$

$$U_{n+1}-2=\frac{-4+2U_n}{4-U_n}=\frac{2(U_n-2)}{4-U_n}$$

Donc :